## Quarks im Lichte einer Idee von Pais

Fritz Bopp

Sektion Physik, LMU, München

Z. Naturforsch. **35a**, 252–253 (1980); eingegangen am 26. November 1979

*Quarks According to an Idea of Pais*

A wave equation of a kind proposed by Pais in 1953 describes a particle with an infinite sequence of quantum states, which belong to the symmetrical representations $(\lambda, 0)$ of the group SU 3. Particles composed of such single ones are connected with the whole set of representations $(\lambda, \mu)$ of SU 3. The wave equation is compatible with an exclusion principle. Assuming that only particles with zero triality occur, all quarks and quarklike particles are excluded. Neither colours, nor bags are needed, as we do not need repulsive forces to exclude Li-atoms with symmetrical wave functions.

Wir betrachten zunächst klassisch physikalisch einen Materiepunkt in kräftefreier Bewegung. Er habe neben seinen drei Impuls- und drei Lagekoordinaten $\boldsymbol{p}$ bzw. $\boldsymbol{r}$ noch weitere, dynamisch relevante, aber nichträumliche Zustandsvariable $\boldsymbol{P}$, $\boldsymbol{Q}$. In der Quantenmechanik liefert der Isospin ein Beispiel für nichträumliche Eigenschaften.

Sei $K(\boldsymbol{P}, \boldsymbol{Q})$ eine zunächst beliebige Funktion von $\boldsymbol{P}$, $\boldsymbol{Q}$, so befriedigen die Poisson-Klammern von

$$\begin{aligned} &H = \sqrt{\boldsymbol{p}^2 + K^2}, \quad \boldsymbol{P} = \boldsymbol{p}, \\ &\boldsymbol{M} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}, \quad \boldsymbol{M}^0 = H\,\boldsymbol{r} \end{aligned} \tag{1}$$

die Lie-Algebra der Poincaré-Gruppe. Die durch (1) definierten Bewegungsgleichungen sind also Poincaré-invariant.

Der Ansatz $K$ schafft Raum für weitere Symmetrien. Pais [1] hat bereits 1953 solche Symmetrien betrachtet, insbesondere die Drehinvarianz in drei bzw. vier Dimensionen. Beiläufig sei angemerkt, daß $K$ bei dreidimensionalen $\boldsymbol{P}$ und $\boldsymbol{Q}$ nicht Lorentz-invariant sein kann. Es gibt nämlich keine linearen kanonischen Transformationen von $\boldsymbol{P}$ und $\boldsymbol{Q}$, die eine Darstellung der Lorentz-Gruppe liefern. Dagegen ist es möglich, $K$ als SU3-invariant anzunehmen.

Seien $\boldsymbol{P} = (P_1, P_2, P_3)$ und $\boldsymbol{Q} = (Q_1, Q_2, Q_3)$, so ist die der Hamilton-Funktion des sphärischen harmonischen Oszillators gleichende Massenfunktion

$$K = m_0 (\boldsymbol{P}^2 + \boldsymbol{Q}^2) \tag{2}$$

SU3-invariant, wie unmittelbar aus

$$K = m_0\, \boldsymbol{a}^\dagger \cdot \boldsymbol{a} \quad \text{mit} \quad \boldsymbol{a} = \boldsymbol{P} + i\,\boldsymbol{Q}$$

hervorgeht. Lipkin [2] hat die SU3-Invarianz des sphärischen Oszillators in „Group Theory for Pedestrians" ausführlich behandelt. Die Erzeugende für die infinitesimalen kanonischen Transformationen lautet

$$F = \tfrac{1}{2} (\boldsymbol{P}^\top A \boldsymbol{P} + 2\boldsymbol{P}^\top B \boldsymbol{Q} + \boldsymbol{Q}^\top A \boldsymbol{Q})\,. \tag{3}$$

Darin ist $A$ eine symmetrische und $B$ eine schiefsymmetrische $3 \times 3$-Matrix mit 6 bzw. 3 unabhängigen Komponenten:

$$A^\top = A, \quad B^\top = -B\,. \tag{4}$$

Aus

$$\begin{aligned} \delta \boldsymbol{P} &= -\,\partial F/\partial \boldsymbol{Q} = +\,B\boldsymbol{P} - A\boldsymbol{Q}\,, \\ \delta \boldsymbol{Q} &= +\,\partial F/\partial \boldsymbol{P} = +\,A\boldsymbol{P} + B\boldsymbol{Q} \end{aligned}$$

erhält man unmittelbar mit Rücksicht auf (4):

$$\begin{aligned} \delta K &= 2m_0 (\boldsymbol{P}\,\delta\boldsymbol{P} + \boldsymbol{Q}\,\delta\boldsymbol{Q}) \\ &= 2m_0 (\boldsymbol{P}^\top B\boldsymbol{P} + \boldsymbol{Q}^\top B\boldsymbol{Q} - \boldsymbol{P}^\top A\boldsymbol{Q} + \boldsymbol{Q}^\top A\boldsymbol{P}) = 0. \end{aligned}$$

Die Gruppe ist also neunparametrig (U3). Im Falle

$$\operatorname{Spur} A = 0 \tag{5}$$

bleibt die achtparametrige SU3 übrig.

In herkömmlicher Weise führt (1) zu der Dirac-ähnlichen Wellengleichung

$$i\,\partial_t \psi = H\,\psi, \quad H = -\,i\,\varrho_1\,\sigma \cdot \nabla + m_0\,\varrho_3\,\boldsymbol{a}^\dagger \cdot \boldsymbol{a}\,. \tag{6}$$

Darin sind $\boldsymbol{a}^\dagger$ und $\boldsymbol{a}$ Bosonen-Operatoren. Im Falle $\boldsymbol{p} = 0$ erhält man daraus die Massengleichung

$$m_0\, \boldsymbol{a}^\dagger \cdot \boldsymbol{a} = m\,. \tag{7}$$

Sie führt klarerweise zu den Oszillatorenergien

$$m = n\, m_0, \quad n \in (0, 1, 2, \ldots)\,. \tag{8}$$

Den drei Oszillationen entsprechend ist der Entartungsgrad gleich der Anzahl der Summen $n = n_1 + n_2 + n_3$ aus drei nichtnegativen ganzen Zahlen:

$$\eta_n = \frac{(n+1)(n+2)}{2}\,. \tag{9}$$

Das stimmt mit dem Entartungsgrad der symmetrischen Darstellungen $(\lambda, 0)$ der Gruppe SU3 überein.

---

Reprint requests to Prof. Dr. F. Bopp, Sulzbacherstr. 3, D-8000 München 40.

0350-4811 / 80 / 0200-0252 \$ 01.00/0. — Please order a reprint rather than making your own copy.

Die verallgemeinerte Dirac-Gleichung liefert also ein Teilchen mit unendlich vielen Anregungszuständen, welche zu speziellen Darstellungen der SU3 gehören. Betrachten wir nun Systeme von 2, 3 und mehr Teilchen dieser Art, so ergeben sich Darstellungen der SU3, die Produkte von $(\lambda, 0)$ sind und deren irreduzible Bestandteile zu allen möglichen Darstellungen $(\lambda, \mu)$ der SU3 führen [3]. Spezielle Wellengleichungen vom Paisschen Typ liefern also alle Darstellungen der Gruppe SU3, die hier nicht aus Quarks, sondern aus den Lösungen der 1-Teilchengleichung aufgebaut wird. Teilchenverbände sind darum weniger teilchenreich als bei ihrer Zusammensetzung aus Quarks.

Dadurch tritt an die Stelle der Farbhypothese ein Ausschließungsprinzip. Bekanntlich gilt für die Trialität

$$t \equiv (\lambda - \mu)(\text{modulo } 3) \in (+1, 0, -1) \tag{10}$$

der Satz: Seien $t_1, t_2, \ldots, t_n$ die Trialitäten von $n$ Teilchen, so ist die Trialität jedes daraus gebildeten $n$-Teilchensystems

$$t \equiv t_1 + t_2 + \cdots + t_n (\text{modulo } 3) \in (+1, 0, -1). \tag{11}$$

Speziell folgt daraus: Teilchen mit der Trialität 0 können niemals Teilchenkomplexe mit einer von 0 verschiedenen Trialität liefern. Sie bilden also eine Welt für sich. Darum kann man, ohne in Schwierigkeiten zu kommen, das Ausschließungsprinzip einführen: Teilchen sind Lösungen einer SU3-invarianten Dirac-Pais-Gleichung mit der Trialität 0.

Ob mit obiger Wellengleichung bereits das letzte Wort gesprochen ist, bleibe dahingestellt. Wir dürfen jedoch behaupten, daß die Quarktheorie zu einer speziellen Verwirklichung jener Theorie führt, die Pais vor mehr als 25 Jahren vorgeschlagen hat. Dabei werden Colours und Bags überflüssig. Denn Quarks kommen nicht mehr als Individuen vor. Es gibt nur noch verschiedene Anregungszustände einer 1-Teilchen-Wellengleichung. Quarks sind hiernach auf ähnliche Weise ausgeschlossen wie z.B. drei 1s-Zustände im Li-Atom. Auf die zugehörige Eichtheorie gehen wir hier noch nicht ein [4].

Auch wenn es sich als nötig erweisen sollte, andere Wellengleichungen zu betrachten, wird man sagen dürfen, die Zeit sei reif zu einer Rückkehr zur Idee von Pais.

[1] A. Pais, Physica **19**, 869 (1953).
[2] H. J. Lipkin, Lie Groups for Pedestrians, North-Holland Publishing Cy., 1965.
[3] L. B. Okun, Weak Interactions of Elementary Particles; Pergamon Press, Oxford 1965.
[4] Bereffend Antiteilchen vgl. F. Bopp, Teilchen und Antiteilchen nach einer U3 invarianten Paisgleichung. Summar in S. B. Bay. Akad. Wiss., math.-naturw. Kl., 1980.